Über Gruppen, deren sämtliche nicht-triviale Potenzen zyklische Untergruppen der Gruppe sind.

Von F. SZÁSZ in Debrecen.

Dem Andenken meines Lehrers T. Szele gewidmet

Unter der k-ten Potenz G^k einer beliebigen Gruppe G versteht man die durch die k-ten Potenzen der Elementen von G erzeugte Untergruppe. Die Potenzen $G^1 = G^{-1} = G$ und $G^0 = \{1\}$ nennen wir trivial.

Wir haben in der Arbeit[1]) alle Gruppen bestimmt, deren sämtliche zyklische Untergruppen gewisse Potenzen der Gruppe sind. Das duale Problem, d. h. die Bestimmung aller Gruppen, deren sämtliche nicht-triviale Potenzen zyklisch sind, wurde von Professor L. FUCHS aufgeworfen und wird hier von uns gelöst.

Eine beliebige Gruppe G wird eine *Gruppe mit der Eigenschaft E* genannt, wenn ihre sämtlichen nicht-trivialen Potenzen zyklisch sind. Jede zyklische Gruppe hat die Eigenschaft E. Das Ziel dieser Arbeit ist nachzuweisen, daß duch die Eigenschaft E unter allen Gruppen die zyklischen Gruppen charakterisiert werden. Die sämtlichen nicht-trivialen Potenzen der Gruppe G können also nur so zyklisch sein, wenn auch die trivialen Potenzen zyklisch sind.

Satz. *Eine Gruppe G hat die Eigenschaft E dann und nur dann, wenn sie zyklisch ist.*

Beweis. Nehmen wir an, daß G eine periodische Gruppe mit der Eigenschaft E ist. Es sei g ein beliebiges Element der Gruppe G und $O(g) = m$. Ist $k > 1$ eine ganze Zahl mit $(k, m) = 1$, so existiert eine ganze Zahl r, für welche die Kongruenz $kr \equiv 1 \pmod{m}$ besteht. Da aber $G^k = \{a\}$ zyklisch ist, und die Gleichung $g^k = a^i$ mit einem gewissen Exponenten i gilt, so bekommen wir $g = a^{ir}$, d. h. $G = \{a\}$.

---

1) F. SZÁSZ, On groups every cyclic subgroup of which is a power of the group, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 6 (1956), 475—477.

Es sei nachher G eine Gruppe mit der Eigenschaft E und g ein Element von G mit $O(g)=\infty$. Ist $G^2=\{a\}$ und $G^3=\{b\}$, so gilt $O(a)=\infty$ und $O(b)=\infty$. Da aber $\{a\}$ und $\{b\}$ Normalteiler von G sind, folgt hieraus die Existenz von ganzen Zahlen r, s mit $b^2=a^r$ und $b^{-1}ab=a^s$. Wir bekommen $b^2=b^{-1}a^rb=(b^{-1}ab)^r=a^{rs}=b^{2s}$, weshalb $2s=2$ und $s=1$, d. h. $ab=ba$ ist. Ist x ein beliebiges Element von G, so folgt aus $x=x^{-2}\cdot x^3$ ($x^{-2}\in\{a\}=G^2$ und $x^3\in\{a,b\}=G^3$) das Bestehen von $G=\{a,b\}$. G ist also eine torsionsfreie kommutative Gruppe mit endlich vielen Erzeugenden. Die Abbildung $x\to x^k$ ($k\neq 0$, $x\in G$) ist ein Meromorphismus der Gruppe G. Für $k>1$ ist die Potenz G^k ein isomorphes Bild von G, also ist auch G zyklisch.

Andererseits ist klar, daß alle zyklischen Gruppen die Eigenschaft E haben, womit unser Satz bewiesen ist.

(Eingegangen am 29. August 1955, in endgültiger Form am 12. März 1956.)